UNIVERSITE CHEIKH ANTA DIOP DE DAKAR

OFFICE DU BACCALAUREAT

E .mail : office@ucad.edu.sn

Site web : officedubac.sn

21G26NA0152
Durée : 4 heures
Séries : S2-S2A-S4-S5 – Coef. 5

Epreuve du 1er groupe

MATHEMATIQUES

Les calculatrices électroniques non imprimantes avec entrée unique par clavier sont autorisées. Les calculatrices permettant d'afficher des formulaires ou des tracés de courbe sont interdites. Leur utilisation sera considérée comme une fraude (Cf. Circulaire n° 5990/OB/DIR. du 12 08 1998).

EXERCICE 1 (05 points)

Une urne U_1 contient 4 boules noires et 3 boules blanches.
Une urne U_2 contient 3 boules noires et 2 boules blanches.
Expérience : on jette un dé à 6 faces numérotées de 1 à 6, chaque face ayant la même probabilité d'apparaître. Si la face numérotée 6 apparaît, on tire une boule dans U_1, sinon on tire une boule dans U_2.
On considère les événements suivants : A « obtenir la face numérotée 6 », B « tirer une boule blanche ».

1. Schématiser la situation de l'expérience sous forme d'un arbre pondéré. **(0,5 pt)**
2. Donner les probabilités de A et $\bar{A}$, où $\bar{A}$ est l'événement contraire de A. **(0,5 pt)**
3. Déterminer la probabilité de l'événement B. **(0,75 pt)**
4. Calculer $p_B(A)$, probabilité de A sachant B. **(0,5 pt)**
5. L'expérience précédente se déroule 5 fois de suite de façon indépendante.
   Soit X la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches obtenues.
6. Donner la loi de probabilité de X. **(1,5 pt)**

a. Trouver l'espérance mathématique de X, $E(X)$ et la variance de X, $V(X)$. **(0,5 pt)**

7. L'expérience se déroule en n parties indépendantes.
   Déterminer la valeur minimale de n pour laquelle la probabilité d'obtenir au moins une boule blanche dépasse 0,99. **(0,75 pt)**

EXERCICE 2 (05 pts)

1. a. Déterminer le nombre complexe a tel que $a(1+i) = 1+3i$, puis calculer ia^2. **(0,5+0,5 pt)**
   b. Montrer que l'équation $Z^2 - (1+3i)Z - 4 + 3i = 0$, $Z \in \mathbb{C}$ a pour solutions a et ia. **(0,5+0,5 pt)**
2. Dans le plan complexe rapporté au repère orthornomal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$ d'unité graphique $2\,cm$, on considère les points A et B d'affixes respectives $a = 2+i$ et $b = -1+2i$.
   a. Placer A et B dans le repère. **(0,5 pt)**
   b. Vérifier que $b = ia$ et en déduire la nature exacte du triangle OAB. **(0,25+0,5 pt)**
3. Soit C le point d'affixe $c = 1 + \frac{1}{2}i$.
   a. Déterminer l'affixe d du point D tel que le triangle OCD soit isocèle et tel que mes $(\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OD}) = \frac{\pi}{2}$. **(0,75 pt)**
   b. On note J, K, L et M les milieux respectifs de $[AB], [DA], [CD]$ et $[BC]$.
   Déterminer la nature exacte du quadrilatère $JKLM$ et justifier la réponse. **(1 pt)**

PROBLEME (10 points)

PARTIE A

1) Soit g la fonction définie sur $[0\,,+\infty[$ par $g(x) = \frac{1}{1+x} - 1 - \ln(1+x)$.
a. Dresser le tableau de variations de g sur $[0\,,+\infty[$. **(1 pt)**
b. En déduire le signe de $g(x)$ sur $[0\,,+\infty[$ · **(0,25 pt)**

2) Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O;\ \vec{\imath},\vec{\jmath})$ d'unité graphique $1\ cm$.
On considère la fonction f de représentation graphique (C_f) définie par :

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x}[1+\ln(1+x)] \text{ si } x \geq 0 \\ x + \dfrac{2e^x}{e^x+1} \text{ si } x < 0 \end{cases}$$

a. Montrer que l'ensemble de définition D_f de f est $\mathbb{R}$. **(0,5 pt)**
b. Etudier les limites de f aux bornes de D_f. **(0,75 pt)**
c. Montrer que f est continue en 0 · **(0,5 pt)**
d. Démontrer que pour tout $x \in]0\,,+\infty[$,on a : $\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{1}{e^x}\left[\frac{\ln(1+x)}{x} - \frac{e^x-1}{x}\right]$ · **(0,5 pt)**
e. Etudier la dérivabilité de f en 0 et interpréter géométriquement les résultats obtenus. **(1,25 pt)**

3) Calculer $f'(x)$ sur chacun des intervalles où f est dérivable. **(1 pt)**
4) Etudier le sens de variations de f puis dresser son tableau de variations. **(1 pt)**
5) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in]-\infty\,,0[$ et vérifier que $-0{,}7 < \alpha < -0{,}6$. **(0,75 pt)**
6) Montrer que la droite (Δ) d'équation $y = x$ est asymptote oblique à (C_f) en $-\infty$ et donner l'autre asymptote à (C_f) · **(0,5 pt)**
7) Préciser la position de (Δ) par rapport à (C_f) sur $]-\infty\,,0[$ · **(0,25 pt)**
8) Tracer (C_f) et ses asymptotes. **(0,75 pt)**

PARTIE B

Soit $\lambda \in]-\infty\,,0[$ tel que $\lambda < \alpha$, α étant le réel défini dans la **partie A.**
Soit la partie du plan comprise entre (C_f), (Δ), les droites d'équations $x = \lambda$ et $x = \alpha$ et par $\mathcal{A}(\lambda)$ son aire exprimée avec l'unité d'aire.

1. Calculer $\mathcal{A}(\lambda)$ en fonction de λ et α. **(0,75 pt)**
2. En déduire $\lim\limits_{\lambda \to -\infty} \mathcal{A}(\lambda)$. **(0,25 pt)**